

# COMPITO 13/7/05

①

Scriviamo  $r \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = 2t \end{cases}$  come intersezione di due piani.

Poiché  $t = 2-x = y+1 = z/2$  otteniamo  $r \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y-z+2=0 \end{cases}$ .

Il generico piano per  $r$  ha dunque equazione

$$\lambda x + (\lambda + 2\mu)y - \mu z + 2\mu - \lambda = 0$$

ed imponendo il passaggio per  $P = (1, 0, -1)$  si ottiene

$$\lambda + \mu + 2\mu - \lambda = 0 \quad \text{da cui } \mu = 0, \text{ con cui si determina}$$

$\pi: x+y-1=0$ . La bisettrice del primo ottante ha

equazioni parametriche  $b \begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$ , e

con intersece  $\pi$  per  $u+u-1=0$  cioè per  $u = 1/2$ ,

dunque nel punto  $b \cap \pi = (1/2, 1/2, 1/2)$ . Scegliamo

un altro punto di  $b$  fuori da  $\pi$ , quale

$Q = (1, 1, 1)$  e conduciamo per  $Q$  la retta  $m$  normale

a  $\pi$ : poiché  $\pi$  ha frontiera  $\vec{n}_\pi = (1, 1, 0)$  otteniamo

$m \begin{cases} x = 1+v \\ y = 1+v \\ z = 1 \end{cases}, v \in \mathbb{R}$ , ed osserviamo che  $m$  intersece  $\pi$  per

$(1+v) + (1+v) - 1 = 0$ , cioè per  $v = -1/2$ . Ciò significa che

il punto  $Q'$  simmetrico a  $Q$  rispetto a  $\pi$  ha coordinate

$2 \cdot (-1/2) = -1$  su  $m$ , perciò  $Q' = (0, 0, 1)$ . La retta

s cercata è dunque la retta per  $b \cap \pi$  e per  $Q'$ .

Essa ha quindi direzione  $b \cap \pi - Q' = (1/2, 1/2, -1/2)$  e

passa per  $Q'$ , quindi ha equazioni parametriche

$s \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

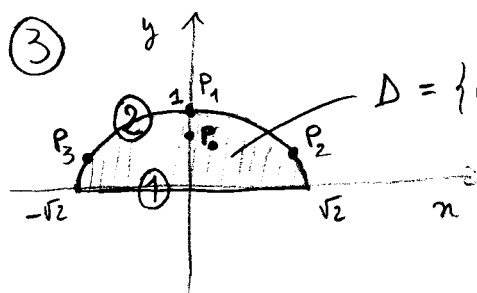
② Ricordando che  $\nabla f(P)$  è sempre normale alle corrispondente curve di livello di  $f$  passante per  $P$ , calcoliamo  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{3x-y^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{3x-y^2}$  da cui

$$\nabla f(P) = \frac{1}{3x-y^2} (3, -2y). \text{ L'asse delle } y \text{ ha verso}$$

$$(0, 1). \text{ Deve perciò risultare } 0 = \nabla f(P) \cdot (0, 1) = \frac{-2y}{3x-y^2} \text{ da cui } \underline{y=0}. \text{ Poiché i punti cercati}$$

debbono appartenere al dominio di  $f$ , dovrà essere inoltre che  $\underline{3x-y^2 > 0}$ . In definitiva si tratta

della semiretta aperta  $\boxed{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0, x>0\}}$ .



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1\} \text{ e } \partial D = ① \cup ② \text{ ove}$$

$$① = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, y=0\}$$

$$② = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = x^2 + 2y^2 - 2 = 0, y \geq 0\}$$

• Osserviamo che  $z = f(x, y) = y e^{x^2-y^2}$  è di classe  $C^\infty$ .

Determiniamo dapprima gli eventuali punti critici interni.

$$\text{Abbiamo } \frac{\partial f}{\partial x} = y e^{x^2-y^2} \cdot 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2} + y e^{x^2-y^2} (-2y) \text{ da cui}$$

$$\underline{\underline{\nabla f(P) = e^{x^2-y^2} (2xy, 1-2y^2)}}.$$

$$\text{Perciò } \nabla f(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ 1-2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{P = P_0 = (0, 1/\sqrt{2})}$$

ove si è tenuto conto che  $y \geq 0$  in  $D$ . Effettivamente

$P_0$  è interno a  $D$ ; calcoliamo quindi

$$\boxed{f(P_0) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}}$$

•• Ricordiamo ora gli eventuali estremi di  $f|_{\textcircled{1}}$ .

Si vede subito che  $f|_{\textcircled{1}} = 0$  costantemente.

•• Ricordiamo quindi gli eventuali estremi di  $f|_{\textcircled{2}}$

Il metodo di Lagrange impone

$$\left\{ \begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \\ g(x, y) = 0, y \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} 2xy & 1-2y^2 \\ n & 2y \end{pmatrix} = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0, y \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4xy^2 - n + 2ny^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} n(6y^2 - 1) = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 0 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \text{oppure} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6y^2 - 1 = 0 \\ x^2 = 2(1 - y^2) \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \pm \sqrt{5/3} \\ y = 1/\sqrt{6} \end{array} \right.$$

e si ottengono i punti

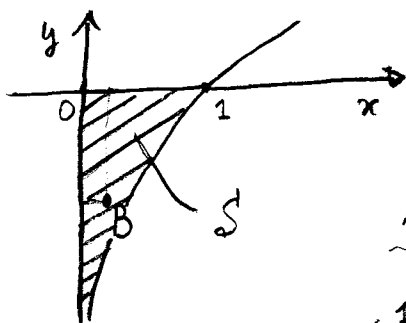
|                                   |                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------|-------------------------------------|
| $P_1 = (0, 1)$                    | $\longrightarrow$ | $f(P_1) = 1/e$                      |
| $P_2 = (\sqrt{5/3}, 1/\sqrt{6})$  | $\longrightarrow$ | $f(P_2) = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{6}}$ |
| $P_3 = (-\sqrt{5/3}, 1/\sqrt{6})$ | $\longrightarrow$ | $f(P_3) = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{6}}$ |

•• Confrontando i valori comuni di  $f$  in  $P_0, P_1, P_2, P_3$  e in  $\textcircled{1}$ , si vede in definitiva che

$\textcircled{1}$  è costituito da punti di minimo, e  $\min(f) = 0$

$P_2$  e  $P_3$  sono punti di massimo, e  $\max(f) = \frac{e^{3/2}}{\sqrt{6}}$

④



$$\text{Area di } S = \int_0^1 dx \int_{\ln x}^0 dy = \int_0^1 -\ln x \, dx =$$

$$= -\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx = -\lim_{a \rightarrow 0^+} [x(\ln x - 1)]_a^1 = 1$$

Quindi:

$$\bar{x}_B = \int_0^1 x \, dx \int_{\ln x}^0 dy = -\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x \ln x \, dx = -\lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2}) \right]_a^1 =$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\bar{y}_B = \int_0^1 dx \int_{\ln x}^0 y \, dy = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{\ln x}^0 dx = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln^2 x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0^+} [x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)]_a^1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

perciò il baricentro è  $B = (\frac{1}{4}, -1)$ .

$$\text{NB: } \bullet \int \ln x \, dx \stackrel{\text{PP}}{=} x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$$

$$\bullet \int x \ln x \, dx \stackrel{\text{PP}}{=} \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{1}{2})$$

$$\bullet \int \ln^2 x \, dx \stackrel{\text{PP}}{=} x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx =$$

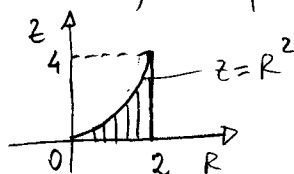
$$= x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) = x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)$$

⑤ In coordinate cilindriche  $V$  si trasforma in

$$V' = \{(R, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq R^2 \leq 4, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

le cui sezioni (che non dipende da  $\theta$ ) nel piano  $(R, z)$

è data dalla figura



Dunque 
$$\iiint_V e^z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} R e^z \, dR \, d\theta \, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 R \, dR \int_0^{R^2} e^z \, dz = 2\pi \int_0^2 R \left[ e^z \right]_0^{R^2} dR =$$

$$= 2\pi \int_0^2 R (e^{R^2} - 1) \, dR = 2\pi \left( \int_0^2 \left( \frac{1}{2} \cdot 2R e^{R^2} - R \right) dR \right)$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{2} e^{R^2} - \frac{R^2}{2} \right]_0^2 = \pi \left[ e^{R^2} - R^2 \right]_0^2 = \boxed{\pi (e^4 - 3)}.$$

⑥ Si tratta della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  con

$$a_n = \frac{n \left( \lg\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)}{\sqrt{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad \text{coniche}$$

$a_n > 0$  poiché  $\lg\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n}$  e  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$  essendo  $1 + \frac{1}{n} > 0$

Si tratta quindi di una serie a termini positivi.

Si verifica facilmente (con l'Hôpital) che per  $n \rightarrow +\infty$

- $\lg \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$  è infinitesimo di ordine 3
- $\frac{1}{\sqrt{n}}$  è infinitesimo di ordine  $\frac{1}{2}$
- $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  è infinitesimo di ordine 1

Quindi  $a_n$  è infinitesimo di ordine  $3 - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} > 1$ .

Per il criterio dell'ordine di infinitesimo possiamo perciò concludere che la serie converge.